

Modelos Matemáticos II

FACULTAD
DE
CIENCIAS
UNIVERSIDAD DE GRANADA



Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

Modelos Matemáticos II

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

José Juan Urrutia Milán

Granada, 2026

Índice general

0. Optimización en dimensión finita	5
1. Optimización en dimensión infinita	7
1.1. Derivada de Gateaux	7
1.2. Estudio de funcionales integrales	8
1.3. Problemas con frontera libre	12
1.4. Solucionar Ecuaciones Diferenciales	14
1.4.1. Ecuaciones de tipo Euler	15
1.4.2. Versiones no homogéneas. Método de los coeficientes indeter- minados	15
1.5. Estudio de extremos locales de funcionales	16

0. Optimización en dimensión finita

La única experiencia que hemos tenido en la carrera con el mundo de la optimización es la optimización de funciones reales de variable real. Como el lector pueda llegar a comprender este punto de partida es demasiado básico para el nivel de la asignatura, que comienza explicando la optimización en dimensión infinita.

Por ello, es recomendable repasar el documento que le haya proporcionado su profesor sobre conceptos clave que hay que tener en cuenta a la hora de realizar optimización en varias dimensiones, de forma pormenorizada. En este capítulo recuperamos (o al menos mencionamos) los conceptos más importantes que hemos de tener en cuenta después de esta pasada rápida por el mundo de la optimización en dimensión finita, para que el choque con la optimización en dimensión finita no nos sea tan grande como pueda parecer.

Para el desarrollo de este tema, conviene tener en cuenta a la hora de resolver un problema de optimización en dimensión finita:

- Análisis de derivadas primeras y segundas: formas cuadráticas y polinomio de Taylor.
- Complicaciones en la frontera.
- Optimización con restricciones de igualdad¹, método de los multiplicadores de Lagrange.
- Nociones de convexidad permiten pasar de nociones locales a globales.
- Derivadas direccionales.
- Programación lineal².
- Teorema de Weierstrass para la existencia de óptimos, previa a buscarlos.

Teorema 0.1 (de Weierstrass). *Sea $K \subset \mathbb{R}^d$ un conjunto compacto y $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ una aplicación continua. Entonces f alcanza su mínimo.*

¹En el caso de las restricciones de tipo desigualdad tenemos los multiplicadores KKT (Karush-Kuhn-Tucker).

²Hay problemas similares, conocidos como programación cuadrática y programación convexa.

Demostración. Tomando $\alpha = \inf_{x \in K} f(x)$, sabemos que existe una sucesión $\{x_n\}$ de puntos de K de forma que $\{f(x_n)\} \rightarrow \alpha$. Por compacidad ha de existir $x \in K$ de forma que $\{x_n\} \rightarrow x$, y por continuidad de f tenemos que $\{f(x_n)\} \rightarrow f(x)$, de donde $f(x) = \alpha$. $\square$

Definición 0.1 (Semicontinua inferiormente). Sea X un espacio topológico 1AN, decimos que una aplicación $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ es semicontinua inferiormente si para toda sucesión convergente $\{x_n\}$ de puntos de X se tiene que:

$$\liminf \{f(x_n)\} \geq f(\lim \{x_n\})$$

Teorema 0.2 (Método directo del cálculo de variaciones). *Sea K un espacio topológico 1AN compacto y $F : K \rightarrow \mathbb{R}$ una aplicación semicontinua inferiormente. Entonces F alcanza su mínimo.*

Demostración. Tomando $\alpha = \inf_{x \in K} F(x)$, sabemos que existe una sucesión $\{x_n\}$ de puntos de K de forma que $\{F(x_n)\} \rightarrow \alpha$. Por compacidad ha de existir $x \in K$ de forma que $\{x_n\} \rightarrow x$. Tenemos así que:

$$\alpha = \lim \{F(x_n)\} = \liminf \{F(x_n)\} \geq F(x)$$

Y como $\alpha = \inf_{x \in K} F(x)$ tendrá que ser $F(x) = \alpha$. $\square$

1. Optimización en dimensión infinita

1.1. Derivada de Gateaux

En dimensión infinita tenemos también el concepto de derivadas direccionales.

Sea X un espacio normado, $D \subset X$ y sea $F : D \rightarrow \mathbb{R}$. Fijamos $y \in D$, diremos que $\varphi \in X \setminus \{0\}$ es **dirección admisible para y en D** si existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que $y + \varepsilon\varphi \in D$ para¹ $\varepsilon \in]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[$. Por tanto, está definida la correspondencia:

$$\varepsilon \longmapsto F(y + \varepsilon\varphi), \quad \varepsilon \in]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[$$

Supongamos que es derivable, en cuyo caso diremos que F es derivable en el sentido de Gateaux en y a lo largo de φ . La derivada correspondiente se define como:

$$\delta_\varphi F(y) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{F(y + \varepsilon\varphi) - F(y)}{\varepsilon} = \left[\frac{d}{d\varepsilon} F(y + \varepsilon\varphi) \right]_{\varepsilon=0}$$

Diremos que F es derivable en el sentido de Gateaux en un punto $y \in D$ si F es derivable en el sentido de Gateaux en y para toda dirección admisible φ .

Diremos que $y_* \in D$ es un **punto crítico** (o estacionario) de F si²:

$$\delta_\varphi F(y_*) = 0 \quad \forall \varphi \text{ dirección admisible}$$

Ejemplo. Consideremos $D = \{C^1[-1, 1] : y(-1) = 1 = y(1)\} \subset C^1[-1, 1]$. Para $y(x) = x^2 \in D$, ¿son direcciones admisibles las siguientes?

$$\begin{aligned}\varphi_1(x) &= x^2 \\ \varphi_2(x) &= 1 - x^2\end{aligned}$$

Para que sean direcciones admisibles necesitamos comprobar que

$$y_\varepsilon(x) = y(x) + \varepsilon\varphi_i(x) \in D \quad \text{para } \varepsilon \in]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[, \quad i \in \{1, 2\}$$

1. Para $y_\varepsilon(x) = x^2 + \varepsilon x^2 = x^2(1 + \varepsilon)$, tenemos que $y_\varepsilon(-1) = 1 + \varepsilon \neq 1$, por lo que no es una dirección admisible para ningún ε .

¹Podríamos definirlo en $]0, \varepsilon_0[$, pero por motivos pedagógicos nos restringiremos a este caso, por simplicidad a la hora de dar los enunciados.

²También incluimos aquí los puntos en los que no hay ninguna dirección admisible.

2. Para $y_\varepsilon(x) = x^2 + \varepsilon(1 - x^2)$ tenemos que:

$$y_\varepsilon(-1) = 1 + \varepsilon(1 - 1) = 1$$

$$y_\varepsilon(1) = 1 + \varepsilon(1 - 1) = 1$$

Por lo que sí que es una dirección admisible.

Cualquier $\varphi \in C^1[-1, 1]$ con $\varphi(-1) = 0 = \varphi(1)$ será una dirección admisible.

Notación. Notaremos usualmente:

$$C_0^1([a, b]) = \{y \in C^1([a, b]) : y(a) = 0 = y(b)\}$$

Proposición 1.1. Sea X un espacio normado, sea $D \subset X$ y $F : D \rightarrow \mathbb{R}$. Si $y_0 \in D$ es extremo relativo de F y F es derivable de Gateaux en y_0 , entonces y_0 es un punto crítico.

Demostración. Supongamos que en y_0 se alcanza un mínimo local (en caso de máximo es análogo), es decir, existe un entorno de y_0 en el cual $F(y_0) \leq F(y)$ para cualquier y en dicho entorno. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que es de la forma $D \cap B(y_0, \delta)$, para $\delta \in \mathbb{R}^+$.

Dada $\varphi \in X$ dirección admisible para y_0 , definimos $y_\varepsilon = y_0 + \varepsilon\varphi$, con lo que existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que $y_\varepsilon \in D \quad \forall \varepsilon \in]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[$. Observemos que:

$$\|y_0 - y_\varepsilon\| = |\varepsilon|\|\varphi\| \implies y_\varepsilon \in B(y_0, \delta) \quad \forall \varepsilon \in \left] -\frac{\delta}{\|\varphi\|}, \frac{\delta}{\|\varphi\|} \right[$$

Sea $\bar{\varepsilon} = \min \left\{ \varepsilon_0, \frac{\delta}{\|\varphi\|} \right\}$, la correspondencia $\varepsilon \mapsto F(y_\varepsilon)$ está definida en $]-\bar{\varepsilon}, \bar{\varepsilon}[$, es derivable y tiene un mínimo local en $\varepsilon = 0$. En dicho caso, como F es derivable de Gateaux en y_0 respecto a φ , obtenemos que $\delta_\varphi F(y_0) = 0$. Como la dirección admisible era arbitraria, se cumple para cualquiera. $\square$

1.2. Estudio de funcionales integrales

Tomaremos $X = C^1(I)$, con $I = [x_0, x_1]$ para $x_0 < x_1$. Usaremos la norma:

$$\|y\|_{C^1} = \|y\|_\infty + \|y'\|_\infty$$

Consideraremos funcionales dados por:

$$\mathcal{F}(y) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x)) \, dx$$

Típicamente consideraremos³ $F : I \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ integrable, e indicaremos sus variables por $F = F(x, y, p)$.

³O quizás en otro dominio de definición.

Notación. Usaremos los convenios:

$$F_x = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad F_y = \frac{\partial F}{\partial y}, \quad F_p = \frac{\partial F}{\partial p}$$

Y los análogos para derivadas parciales segundas:

$$F_{yp} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial p}$$

Lema 1.2 (Fundamental del cálculo de variaciones). *Sea $I = [x_0, x_1]$, sea $f \in C^1(I)$. Si:*

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\varphi(x) \, dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_0(I)$$

Entonces $f(x) = 0 \quad \forall x \in I$.

Demostración. Por contrarrecíproco, podemos suponer que $\exists \bar{x} \in]x_0, x_1[$ tal que $f(\bar{x}) > 0$. Así, existe un entorno de $\bar{x}$ tal que $f(x) > 0 \quad \forall x \in]\bar{x}_0, \bar{x}_1[$. Podemos encontrar $\varphi \in C_0(I)$ tal que

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\varphi(x) \, dx > 0$$

Por ejemplo, podemos construir φ a partir de la función:

$$\rho(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{|x|^2-1}} & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde $\rho \in C_0^\infty([-1, 1])$. □

Observación. Varios comentarios:

- En el Lema fundamental se puede cambiar $C_0(I)$ por $C_0^1(I), \dots, C_0^k(I), \dots, C_0^\infty(I)$.
- Hay una versión alternativa del Lema, que a continuación se enuncia.
- De hecho, en dicho enunciado podemos también exigir para toda $\varphi \in C_c^\infty(I)$.

Lema 1.3. *Sea $I =]x_0, x_1[$, $f \in L_{loc}^1(I)$. Si:*

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\varphi(x) \, dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_c(I)$$

Entonces, $f(x) = 0$ para casi todo $x \in I$.

Demostración. El dual de $C_c(I)$ contiene a $L_{loc}^1(I)$ y se extrae a partir de ahí. □

Teorema 1.4. *Sea $I = [x_0, x_1]$, $F \in C^2(I \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$. Consideramos el funcional*

$$\mathcal{F}(y) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x)) \, dx$$

definido sobre:

$$D = \{y \in C^1([x_0, x_1]) : y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1\}, \quad y_0, y_1 \in \mathbb{R}$$

Dado $y_* \in D \cap C^2(I)$ punto crítico de $\mathcal{F}$, satisface la ecuación de Euler-Lagrange:

$$F_y(x, y_*(x), y'_*(x)) - \frac{d}{dx} [F_p(x, y_*(x), y'_*(x))] = 0 \quad \forall x \in I$$

$$\boxed{F_y - \frac{d}{dx}(F_p) = 0}$$

Demostración. Dado $y \in D$, $\varphi \in X \setminus \{0\}$, notaremos $y_\varepsilon = y + \varepsilon\varphi$, calculemos $\delta_\varphi \mathcal{F}(y)$ formalmente:

$$\begin{aligned} \frac{dy_\varepsilon}{d\varepsilon} &= \varphi \\ y'_\varepsilon = y' + \varepsilon\varphi' &\implies \frac{dy'_\varepsilon}{d\varepsilon} = \varphi' \end{aligned}$$

De donde:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varepsilon} \mathcal{F}(y_\varepsilon) &= \frac{d}{d\varepsilon} \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_\varepsilon(x), y'_\varepsilon(x)) \, dx \\ &= \int_{x_0}^{x_1} F_y(x, y_\varepsilon(x), y'_\varepsilon(x)) \frac{dy_\varepsilon}{d\varepsilon} + F_p(x, y_\varepsilon(x), y'_\varepsilon(x)) \frac{dy'_\varepsilon}{d\varepsilon} \, dx \\ &= \int_{x_0}^{x_1} F_y(x, y_\varepsilon(x), y'_\varepsilon(x)) \varphi(x) + F_p(x, y_\varepsilon(x), y'_\varepsilon(x)) \varphi'(x) \, dx \end{aligned}$$

Por lo que:

$$\left[\frac{d}{d\varepsilon} \mathcal{F}(y_\varepsilon) \right]_{\varepsilon=0} = \int_{x_0}^{x_1} F_y(x, y(x), y'(x)) \varphi(x) + F_p(x, y(x), y'(x)) \varphi'(x) \, dx$$

Así:

$$\delta_\varphi \mathcal{F}(y) = \int_{x_0}^{x_1} F_y \varphi + F_p \varphi' \, dx$$

Nos queremos quitar φ' de esta expresión, lo conseguiremos integrando por partes:

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_1} F_p(x, y(x), y'(x)) \varphi'(x) \, dx &= - \int_{x_0}^{x_1} \frac{d}{dx} [F_p(x, y(x), y'(x))] \varphi(x) \, dx \\ &\quad + F_p(x_1, y(x_1), y'(x_1)) \varphi(x_1) - F_p(x_0, y(x_0), y'(x_0)) \varphi(x_0) \end{aligned}$$

De donde:

$$\delta_\varphi \mathcal{F}(y) = \int_{x_0}^{x_1} \left(F_y - \frac{d}{dx} F_p \right) \varphi \, dx + [F_p \varphi]_{x_0}^{x_1}$$

¿Cuáles son las direcciones admisibles? Dada $y \in D$, ¿cómo ha de ser φ para que $y_\varepsilon = y + \varepsilon\varphi \in D$? Tomando $\varphi \in C^1([x_0, x_1])$ tenemos la condición de regularidad, y vemos que:

$$y_\varepsilon(x_0) = y(x_0) + \varepsilon\varphi(x_0) = y_0 \iff \varphi(x_0) = 0$$

Análogamente necesitamos que $\varphi(x_1) = 0$. Por tanto, las direcciones admisibles son $\varphi \in C_0^1([x_0, x_1])$. Usando estas direcciones admisibles, vemos que:

$$\delta_\varphi \mathcal{F}(y) = \int_{x_0}^{x_1} \left(F_y - \frac{d}{dx} F_p \right) \varphi \, dx + [F_p \varphi]_{x_0}^{x_1} \overset{0}{\rightarrow} 0$$

Para cualquier dirección admisible φ . Usando que y_* es punto crítico, tenemos:

$$\delta_\varphi \mathcal{F}(y_*) = \int_{x_0}^{x_1} \left(F_y(x, y_*(x), y'_*(x)) - \frac{d}{dx} [F_p(x, y_*(x), y'_*(x))] \right) \varphi(x) \, dx = 0$$

Para toda $\varphi \in C_0^1(I)$. Por tanto, por el Lema fundamental del cálculo de variaciones tenemos la ecuación de Euler-Lagrange. $\square$

Si los candidatos no son de clase 2, podremos definir soluciones de la ecuación de Euler-Lagrange a partir de la fórmula:

$$\delta_\varphi \mathcal{F}(y) = \int_{x_0}^{x_1} F_y \varphi + F_p \varphi' \, dx$$

Pero involucra conceptos de análisis funcional más finos.

Ejemplo. Estudiar las curvas planas que unen dos puntos dados con mínima longitud.

Tomamos $A = (x_0, y_0), B = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ y supondremos que $x_0 < x_1$. Vamos a considerar únicamente aquellas curvas que pueden ser descritas como gráficas de una función⁴, es decir, aplicaciones $x \mapsto (x, y(x))$ con:

$$y \in D = \{f \in C^1([x_0, x_1]) : f(x_0) = y_0, f(x_1) = y_1\}$$

Así, las curvas tienen extremos en los puntos A y B . Para este tipo de curvas se calcula su longitud como:

$$L(y) = \int_{x_0}^{x_1} \|(1, y'(x))\|_2 \, dx = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + (y'(x))^2} \, dx$$

Así, tenemos $F = F(p) = \sqrt{1 + p^2}$. La ecuación de Euler-Lagrange en este caso es:

$$F_p = \frac{p}{\sqrt{1 + p^2}}$$

$$0 = F_y - \frac{d}{dx} (F_p) = -\frac{d}{dx} \left(\frac{y'(x)}{\sqrt{1 + (y'(x))^2}} \right) \quad \forall x \in [x_0, x_1]$$

Por lo que todos los puntos críticos $y(x)$ de L satisfacen esta ecuación diferencial, de donde podemos deducir que para cierto $c_1 \in \mathbb{R}$:

$$\frac{y'(x)}{\sqrt{1 + (y'(x))^2}} = c_1 \implies y'(x) = c_1 \sqrt{1 + (y'(x))^2}$$

⁴Pues nos parece que las curvas que optimizan el problema son de este tipo y simplifica mucho el problema.

de donde:

$$(y'(x))^2 = c_1 \left(1 + (y'(x))^2\right) \iff (y'(x))^2 = c_2$$

para cierto $c_2 \in \mathbb{R}$. Como $y \in C^1([x_0, x_1])$, tenemos entonces que $y'(x)$ es constante $\forall x \in [x_0, x_1]$, con lo que $y(x) = c_3 + c_4 x \quad \forall x \in [x_0, x_1]$.

Las constantes c_3 y c_4 se determinan por las condiciones $y(x_i) = y_i$, $i \in \{0, 1\}$, obteniendo un único candidato a solución, que se corresponde con la línea recta. Habría que comprobar que este candidato es efectivamente un mínimo de la función a optimizar.

Definición 1.1. Diremos que $y \in X$ es un **extremal** del funcional $\mathcal{F}$ si resuelve la ecuación de Euler-Lagrange asociada (notemos que no se pide $y \in D$).

1.3. Problemas con frontera libre

En las condiciones del Teorema 1.4, supongamos que

$$D = \{y \in C^1([x_0, x_1]) : y(x_0) = y_0\}, \quad y_0 \in \mathbb{R}$$

Todo punto crítico $y_* \in D \cap C^2(I)$, además de cumplir la ecuación de Euler-Lagrange, cumple la condición extra⁵ $F_p(x_1, y_*(x_1), y'_*(x_1)) = 0$.

Esto se debe a que:

$$\begin{aligned} \delta_\varphi \mathcal{F}(y) &= \int_{x_0}^{x_1} \left(F_y - \frac{d}{dx}(F_p) \right) \varphi \, dx + [F_p(x, y(x), y'(x)) \varphi(x)]_{x_0}^{x_1} \\ &= \int_{x_0}^{x_1} \left(F_y(x, y(x), y'(x)) - \frac{d}{dx} [F_p(x, y(x), y'(x))] \right) \varphi(x) \, dx \\ &\quad + F_p(x_1, y(x_1), y'(x_1)) \varphi(x_1) - F_p(x_0, y(x_0), y'(x_0)) \varphi(x_0) \end{aligned}$$

En este caso, las direcciones admisibles son:

$$\mathcal{D} = \{\varphi \in C^1(I) : \varphi(x_0) = 0\}$$

Así, si nos restringimos a usar $\varphi \in C_0^1(I) \subset \mathcal{D}$ por la demostración del Teorema 1.4 recuperamos la ecuación de Euler-Lagrange para y_* :

$$F_y - \frac{d}{dx}(F_p) = 0$$

Si ahora nos restringimos a todo el conjunto de direcciones admisibles $\varphi \in \mathcal{D}$ se sigue cumpliendo la ecuación de Euler-Lagrange pero ahora también obtenemos que $\varphi(x_0) = 0$, con lo que:

$$F_p(x_0, y(x_0), y'(x_0)) \varphi(x_0) = 0 \tag{1.1}$$

Así, si y_* era un punto crítico, tendremos que $\delta_\varphi \mathcal{F}(y_*) = 0$, y en vista de la ecuación de Euler-Lagrange y de (1.1) obtenemos que:

$$F_p(x_1, y(x_1), y'(x_1)) \varphi(x_1) = 0$$

⁵La estructura del problema lo exige, pues quitamos una condición y esta tiene que estar por otra parte para tener solución a una EDO de orden 2.

Ejemplo. Si volvemos al último ejemplo, para $I = [x_0, x_1]$, fijamos $y_0 \in \mathbb{R}$, se pide ahora determinar las curvas de menor longitud que unen el punto (x_0, y_0) con algún punto de abscisa x_1 .

Buscamos curvas descritas mediante gráficas, $x \mapsto (x, y(x))$, obteniendo la longitud:

$$L(y) = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx$$

a optimizar sobre $D = \{y \in C^1([x_0, x_1]) : y(x_0) = y_0\}$. Para la ecuación de Euler-Lagrange tenemos que calcular:

$$F = F(p) = \sqrt{1 + p^2} \implies F_p = \frac{p}{\sqrt{1 + p^2}}$$

De donde la ecuación de Euler-Lagrange quedaría:

$$F_y - \frac{d}{dx}(F_p) = -\frac{d}{dx} \left(\frac{y'(x)}{\sqrt{1 + (y'(x))^2}} \right) = 0$$

Es la misma que obteníamos en el ejemplo anterior, obteniendo que los extremales son de la forma:

$$y(x) = c_1 + c_2 x, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Imponiendo las condiciones que tenemos, $y(x_0) = y_0$ y que y alcanza algún punto de abscisa x_1 está implícito en el dominio de definición de y . Obligando ahora la segunda condición que sabemos que han de cumplir los puntos críticos:

$$F_p(x_1, y(x_1), y'(x_1)) = 0$$

Tenemos que:

$$\frac{y'(x_1)}{\sqrt{1 + (y'(x_1))^2}} = 0$$

En este caso esta condición se simplifica a $y'(x_1) = 0$, con lo que y ha de cumplir:

$$\left. \begin{array}{l} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_1) = 0 \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} c_2 = 0 \\ c_1 = y_0 \end{array} \right.$$

Con lo que el único candidato a mínimo es $y(x) = y_0 \quad \forall x \in I$.

El resultado probado anteriormente puede generalizarse, obteniendo un resultado análogo si fijamos el extremo derecho, obteniendo la condición:

$$F_p(x_0, y_*(x_0), y'_*(x_0)) = 0$$

Más aún, si no se fija ningún extremo, se cumplen simultáneamente las condiciones:

$$F_p(x_0, y_*(x_0), y'_*(x_0)) = F_p(x_1, y_*(x_1), y'_*(x_1)) = 0$$

Ejemplo. Como otro ejemplo, busquemos las curvas de longitud mínima que unen un punto con abscisa x_0 con otro con abscisa x_1 , con $x_0 < x_1$.

Busquemos curvas descritas mediante gráficas, $x \mapsto (x, y(x))$, obteniendo la longitud:

$$L(y) = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx$$

a optimizar sobre $D = \{y \in C^1([x_0, x_1])\}$. Para la ecuación de Euler-Lagrange tenemos que calcular:

$$F = F(p) = \sqrt{1 + p^2} \implies F_p = \frac{p}{\sqrt{1 + p^2}}$$

De donde la ecuación de Euler-Lagrange quedaría:

$$F_y - \frac{d}{dx}(F_p) = -\frac{d}{dx} \left(\frac{y'(x)}{\sqrt{1 + (y'(x))^2}} \right) = 0$$

Es la misma que obteníamos en el ejemplo anterior, obteniendo que los extremales son de la forma:

$$y(x) = c_1 + c_2 x, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Ahora no tenemos condiciones en los extremos, con lo que el problema fuerza las condiciones:

$$F_p(x_0, y(x_0), y'(x_0)) = F_p(x_1, y(x_1), y'(x_1)) = 0$$

Que en nuestro caso son:

$$\frac{y'(x_0)}{\sqrt{1 + (y'(x_0))^2}} = \frac{y'(x_1)}{\sqrt{1 + (y'(x_1))^2}} = 0 \iff y'(x_0) = 0 = y'(x_1) \iff c_2 = 0$$

Vemos que el parámetro c_1 queda libre. Intuitivamente, esto se corresponde a que en cada altura tenemos un candidato a mínimo, $y(x) = c_3$.

1.4. Solucionar Ecuaciones Diferenciales

Como ya ha podido percibir, la ecuación de Euler-Lagrange es una ecuación diferencial, por lo que para su uso en esta asignatura conviene adquirir los conocimientos (o repasarlos) de resolución de ecuaciones diferenciales. Un básico conocimiento de las ecuaciones diferenciales es suficiente para su desarrollo en este tema, junto con las técnicas de resolución de ecuaciones diferenciales que a continuación se describen.

Resolviendo en casos prácticos la ecuación de Euler-Lagrange podemos obtener ecuaciones diferenciales del tipo:

- De variables separadas.
- Ecuaciones lineales homogéneas con coeficientes constantes.

- Ecuaciones de tipo Euler homogéneas.
- Versiones no homogéneas de los tres casos anteriores.

Los primeros dos grandes tipos de ecuaciones diferenciales que se tratan en la enumeración anterior fueron vistos ya en la asignatura de Ecuaciones Diferenciales I, y conviene repasar el documento relativo a su temario si no se recuerda cómo solucionar este tipo de ecuaciones. Además, será adecuado que se repasen los cambios de variable de ecuaciones diferenciales.

Respecto a los dos últimos puntos de la enumeración, los tratamos de forma detallada a continuación.

1.4.1. Ecuaciones de tipo Euler

Las ecuaciones de tipo Euler son aquellas ecuaciones diferenciales lineales en las que la variable independiente aparece multiplicada por la variable dependiente siendo la variable independiente un monomio del mismo grado que el orden de la derivada por la que se multiplica, es decir, algo del estilo:

$$x^2 y'' + 2xy' + 4y = 0$$

Resolver ecuaciones de tipo Euler es tan sencillo como aplicar el cambio de variable:

$$u = e^x$$

Y obtendremos una ecuación lineal homogénea con coeficientes constantes, que ya sabemos resolver.

1.4.2. Versiones no homogéneas. Método de los coeficientes indeterminados

Para resolver una lineal completa se obtiene una solución particular y se le suman las soluciones de la homogénea asociada, tal y como vimos en Ecuaciones Diferenciales I.

Hay que buscar clases de funciones que sean cerradas por la parte no homogénea de la ecuación diferencial:

1. Si tenemos un polinomio como ecuación, buscamos con un polinomio.
2. Si tenemos una función trigonométrica, buscamos con una función trigonométrica de la misma frecuencia.
3. Si tenemos una exponencial, buscamos con una exponencial.

Ejemplo. Veamos varios ejemplos:

1. Tenemos:

$$y'' - y = x$$

Vemos a ojo que $y_p(x) = -x$, pero en general habríamos probado con:

$$a + bx, \quad a + bx + cx^2, \quad \dots$$

Dejamos los coeficientes libres y los determinamos exigiendo que se cumpla la ecuación.

3. Para la ecuación:

$$16e^x - 8y - 2y'' = 0$$

Probamos con $y_p(x) = ce^x$, con $c \in \mathbb{R}$:

$$16e^x - 8ce^x - 2ce^x = 0 \iff 16 = 10c \iff c = 16/10$$

2. Tenemos la ecuación (donde $\alpha \in \mathbb{R}$):

$$y'' + \alpha y = \alpha \sin(8x)$$

Probamos con $a \sin(8x) + b \cos(8x)$. Observamos que tenemos una derivada segunda y que no tenemos primera, con lo que podemos tomar ya $b = 0$:

$$-64a \sin(8x) + \alpha a \sin(8x) = \alpha \sin(8x) \iff (\alpha - 64)a = \alpha \iff a = \frac{\alpha}{\alpha - 64}$$

Así, para $\alpha \neq 64$ tenemos dicho a .

¿Qué pasa cuando $\alpha = 64$? Resulta que $\sin(8x)$ nunca va a salir. Al igual que con raíces múltiples, si algo no funciona se pone:

$$ax \sin(8x) + bx \cos(8x)$$

Si no funciona:

$$ax^2 \sin(8x) + bx^2 \cos(8x)$$

Para $\alpha = 64$ sale $y_p(x) = -4x \cos(8x)$.

1.5. Estudio de extremos locales de funcionales

Queremos ver que y_* es un mínimo local para $\mathcal{F}$, con lo que debería existir un entorno en el que $\mathcal{F}(y_*) \leq \mathcal{F}(y)$ para todo y en el entorno.

Basta estudiar el funcional en puntos de la forma $y_* + \varepsilon \varphi$ para φ dirección admisible y ε pequeño ($|\varepsilon| \ll 1$).

Desarrollando por Taylor en ε , para estudiar si y_ε es mejor que y_* se escribe:

$$\mathcal{F}(y_* + \varepsilon \varphi) = \mathcal{F}(y_*) + \varepsilon \frac{d}{d\varepsilon} \mathcal{F}(y_* + \varepsilon \varphi) \Big|_{\varepsilon=0} + \frac{\varepsilon^2}{2} \frac{d^2}{d\varepsilon^2} \mathcal{F}(y_* + \varepsilon \varphi) \Big|_{\varepsilon=0} + O(\varepsilon^3)$$

Estamos haciendo realmente un estudio de la función de una variable

$$\varepsilon \mapsto \mathcal{F}(y_* + \varepsilon \varphi)$$

Y nos interesa comparar $\mathcal{F}(y)$ con $\mathcal{F}(y_* + \varepsilon \varphi)$. Si tenemos un punto crítico la primera derivada será igual a 0, con lo que tenemos que estudiar el desarrollo hasta orden 2.